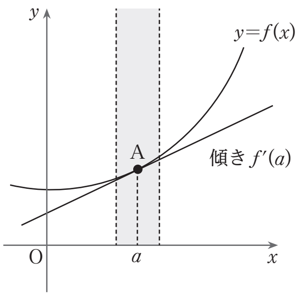
PART3 関数の増減

要点① 関数の増減

「区間」…… $1 \leqq x < 2$，$3 < x$ のような，不等式を満たす実数 x 全体の集合

ある区間における関数の増加・減少を，導関数を用いて調べる。

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の 1 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ に近いところでは，関数のグラフは点 A における接線とほとんど一致している，と考えることができる。



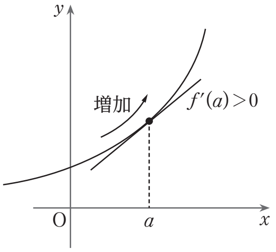
点 A における接線の傾きは，「　　　　　　　」であるから

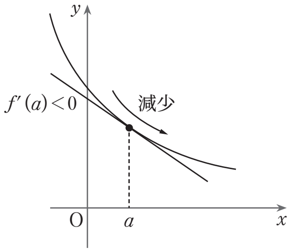
$f'(a)$　　のとき，接線は「　　　　　」であり，$x=a$ の付近で $f(x)$ は「　　」

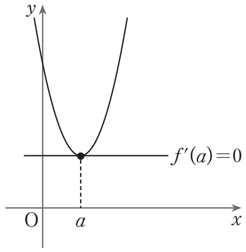
$f'(a)$　　のとき，接線は「　　　　　」であり，$x=a$ の付近で $f(x)$ は「　　」

$f'(a)$　　のとき，接線は「　　　　　」であり，$x=a$ の付近で $f(x)$ は「　　」

であることがわかる。







したがって，関数 $y=f(x)$ のある区間における増加・減少は，その導関数 $f'(x)$ の符号を用いて調べることができる。

関数 $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号

ある区間で

常に $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で増加する。

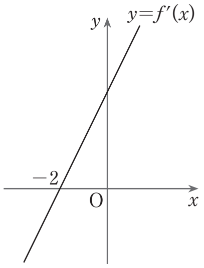
常に $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で減少する。

常に $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ はその区間で定数である(増加も減少もしない)。

例　関数 $f(x)=x^2+4x$ の増減を調べる。

$f'(x)=2x+4$

$f'(x)$　　とすると，$2x+4=0$ より $x=-2$



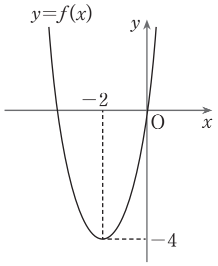
$y=f'(x)$ のグラフは右図より

x　-2 のとき　$f'(x)>0$

x　-2 のとき　$f'(x)<0$

よって，$f'(x)$ の符号および $f(x)$ の増減は，次のような表で表される。

x	……	-2	……
$f'(x)$			
$f(x)$			



したがって，$f(x)$ は

$x \geqq -2$ で増加，$x \leqq -2$ で減少

関数の増減を表す上記のような表を「　　　　」という。表の中の記号「　」はその区間で関数の値が増加することを表し，「　」はその区間で関数の値が減少することを表す。

※関数が増加または減少する区間には，$f'(x)=0$ となる実数 x の値も含まれる。

3 次の関数の増減を調べ，増減表を作成せよ。

(1) $f(x)=x^3-3x^2$　　(2) $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x+2$

Point Pickup

関数の増減

関数 $f(x)$ の増減を調べ，増減表を作成する手順は以下。

① 導関数 $f'(x)$ を求める。

② $f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。

③ ②の値，および $y=f'(x)$ のグラフをもとに，$f'(x)>0$，$f'(x)<0$ となる x の値の範囲を求める。ある区間で

常に $f'(x)>0 \Longrightarrow f(x)$ はその区間で増加する

常に $f'(x)<0 \Longrightarrow f(x)$ はその区間で減少する

常に $f'(x)=0 \Longrightarrow f(x)$ はその区間で定数である(増加も減少もしない)

④ 増減表には，$f'(x)=0$ となる実数 x の値，$f'(x)$ の符号および値 (0)，$f(x)$ の増減 (↗，↘) および値を記入する。

第 17 講　PART3 確認問題

次の関数の増減を調べ，増減表を作成せよ。

1　$f(x)=2x^3-3x^2+2$

x	…	ア	…	イ	…
$f'(x)$	ウ	0	エ	0	オ
$f(x)$	カ	2	キ	1	ク

[ウ ～ ク の選択肢]

① ＋　　② －

③ ↗　　④ ↘

2　$f(x)=-x^3+6x^2-9x$

x	…	ケ	…	コ	…
$f'(x)$	サ	0	シ	0	ス
$f(x)$	セ	-4	ソ	0	タ

[サ ～ タ の選択肢]

① ＋　　② －

③ ↗　　④ ↘

PART3 関数の増減

3 次の関数の増減を調べ，増減表を作成せよ。

(1)　$f(x)=x^3-3x^2$　　(2)　$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x+2$

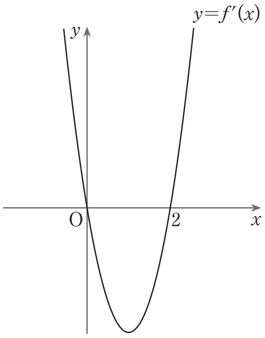
[解答]

(1)　$f(x)=x^3-3x^2$ より　$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 2$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

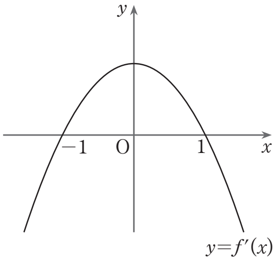


(2)　$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x+2$ より　$f'(x)=-x^2+1=-(x^2-1)=-(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$



第 17 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：0，イ：1，ウ：①，エ：②，
オ：①，カ：③，キ：④，ク：③

[解説]

$f(x)=2x^3-3x^2+2$ より

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると [A]

$$6x(x-1)=0$$

$$x=0,\ 1$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗

[B] [C]

2

[正解] ケ：1，コ：3，サ：②，シ：①，
ス：②，セ：④，ソ：③，タ：④

[解説]

$f(x)=-x^3+6x^2-9x$ より

$$f'(x)=-3x^2+12x-9$$
$$=-3(x^2-4x+3)$$
$$=-3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ とすると [D]

$$-3(x-1)(x-3)=0$$

$$x=1,\ 3$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

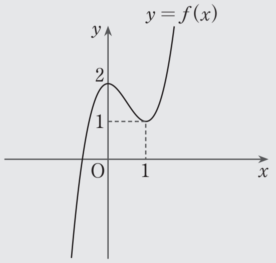
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	0	↘

[E] [F]

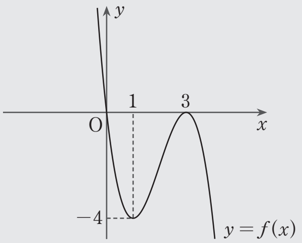
[A]　$f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。

[B]　ある区間で常に
$f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調増加
$f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調減少
$f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ はその区間で定数

[C]



[D]　$f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。

[E]　ある区間で常に
$f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調増加
$f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調減少
$f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ はその区間で定数

[F]